「今度こそわかるＰ≠ＮＰ」（渡辺治）の補足説明

講談社サイエンティフィク, 2014

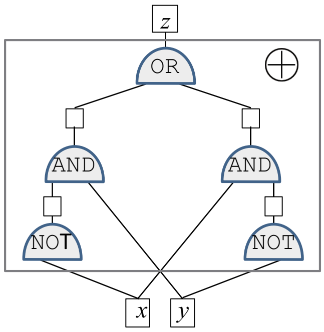
(2014.3.9)

組合せ論理回路

組合せ論理回路（以下では単に回路と呼ぶ）は，計算複雑さの理論特有の計算モデルである．電子回路と似た用語を使っているが，あくまで「計算」をわかりやすく捉えるための抽象的な方法である．そのため極度に単純化している点があり，それがつまづきの原因になっている場合もある．ただ，以下に述べる 2 つの特徴さえ理解すれば，多分大丈夫だと思う．

説明に先立って，まずは，回路での計算例を 1 つ見ておこう．下図を用いる（本書の図 2.3）．

x	y	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



これは排他論理和 $\oplus$（図の左の表で定義された関数）を計算する回路である．計算は（回路全体の）入力ノードの x, y に，各々 0 か 1 が割り当てられ，計算できる素子から順次計算が進んでいく．たとえば $x = 0$, $y = 1$ と割り当てられたとしよう．最初は一番下の 2 つの NOT 素子である．その素子の入力ノード（図で小さな□）の値が定まっているので，その素子が計算され，素子の出力ノード（これも小さな□）に値が定まる．左の NOT の値は $x = 0$ を反転させた 1 である．右は $y = 1$ の反転で 0 となる．そうすると，もう 1 つ上の AND 素子の入力ノードの値が定まるので，その計算が進み，左は $1 \wedge 1 = 1$，右は $0 \wedge 0 = 0$ となる．そうすると OR 素子の入力ノードに値が揃うので，$1 \vee 0 = 1$ が計算され，それが（回路全体の）出力ノードの値 $z = 1$ になる．以上が回路の計算の進み方である．

特徴１：静的設計＆並列性

一般に計算は動的だが，回路は計算が「静的に」表現される．そのため，動きのある計算を物体・構造として表わすことができるので「（もしかすると）計算複雑さの解析の見通しが立てやすいかも？」という希望も持てる．それもあって計算複雑さの理論で使われている．また，確かにその特徴を活かした解析も出てきている．

でも動的な計算を静的に表わすので，ちょっとした工夫が必要となる．たとえば，プログラムでは $x = 0$ のとき○○の計算をし，$x = 1$ のとき△△の計算をする，と書くことができる．ところが回路では，入力値や途中計算の状況に応じて回路を変えることはできない．ではどうするか？最も単純でいつでも使える戦略は「必要と思われる計算は全部やっておく」という戦略である．

たとえば，状況に応じて○○と△△の計算が必要になるプログラムだったとする．また，○○や△△の計算結果は z という変数に得られるものとする．その場合には○○用の回路と△△用の回路を作ってしまう．そしていつでも計算しておいて，最後に計算結果を使う時点で，

$$(x \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge z)$$

を答えとして使うのである.（ここで $\overline{x}$ は x の否定の意味．また，z は 1 ビットの値の想定．z が複数ビットの場合には，各ビットごとに同様の計算を行えばよい.）

要するに（ちょっと無駄かもしれないが）必要な計算をすべて用意しておき，本当に必要になるものだけを拾って使う，という考え方である．

その極め付けが，本書の「こだわり　」で紹介した `add#2 [#1]` という命令の回路による模倣である．レジスタ #1 の番地のメモリの値をレジスタ #2 に加えなければならない．そこで回路的にはすべての番地のメモリの値を取り出す部分回路を作っておき，そのときのレジスタ #1 の値に応じて，正しい番地のメモリの値を足しこむのである.「こだわり　」の図でそれを表現したつもりなのだが，おわかり頂けただろうか？

特徴２：非一様性

回路のもう 1 つの特徴は非一様性である．見てもわかるように，回路は特定の長さの入力列にしか対応しない．たとえば，先の図の回路は，2 ビットの入力列に対する $\oplus$ の計算用の回路である．3 ビット，4 ビット，... 用の回路は別途作る必要がある．

原始計算機械では，1 つの計算問題を解くために設計すべきは 1 つの機械（＝プログラム）だった．それに対し回路では無限個の回路が必要となる．これが回路族である．ただし，その 1 つ 1 つは，対応する長さの入力列すべてに対して対処できなければならない．そこは特徴１で述べた手法を使って設計する．では，異なる長さに対する回路同士の関係は？というと，そこには何の制限もない．異なる長さでまったく違った構造の回路を作ってもよいのだ．これが回路の非一様性である．

回路の非一様性は「さぼり」の結果とも言える．そこまで考えたくなかった，というのが 1 つの理由だろう．正確に言うならば,「一様性を考えなければならないような解析は諦めて，それを無視しても言えるような解析に専念しよう」というのが，回路流の計算複雑さの解析方針なのだ．そのために議論の見通しがよくなったところもある．だが，本当に一様性を無視してもうまく解析できるのか？その点はまだまだわかっていない．ただ，言えるのは，回路の非一様性を不自然につかって「何かができる！」と叫んでも意味がない．その点のみ注意しておけばよいだろう．

補足説明 ot3-circuit 終了